2 簡單多項式函數及其圖形

焦點：一次函數、二次函數

●一次函數（直線圖型）：

1. 一般式：$ax+by=c$
2. 斜截式：$y=mx+d$，其中 m 為直線之斜率，d 為y軸截距。

●二次函數（拋物線圖形）：

1. 一般式：$y=f(x)=ax^2+bx+c$，其中 $a\neq 0$
2. 配方法：$y=f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，其中 $a\neq 0$
3. 圖型特性：

   (1) $a>0\Rightarrow$ 拋物線開口向上，$x=-\dfrac{b}{2a}$ 時，y 有最小值 $m=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

   (2) $a<0\Rightarrow$ 拋物線開口向下，$x=-\dfrac{b}{2a}$ 時，y 有最大值 $m=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

   (3) 拋物線之對稱軸為：直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$

   (4) 拋物線之頂點座標：$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$

4. 二次函數之 y 值，恆正或恆負的條件

   (1) 恆正：$a>0$ 且判別式 $D=b^2-4ac<0$

   (2) 恆負：$a<0$ 且判別式 $D=b^2-4ac<0$

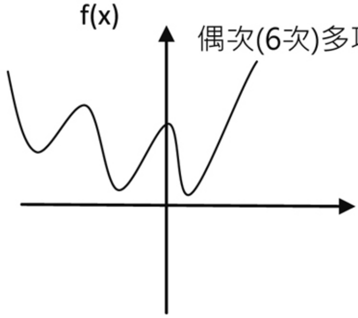
30秒快速理解!!

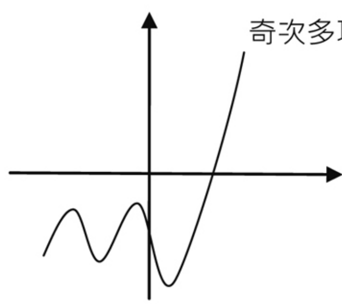
2 (A) $f(x)=(2x-1)\times Q(x)+r$

$\Rightarrow f(x)\div(x-\frac{1}{2})=[(2x-1)\times Q(x)+r]\div(x-\frac{1}{2})=2Q(x)\cdots r$

(B) $f(x)$為實係數多項式，且$a<x<b$，則$f(a),f(b)$可能同時大於或小於0

(C) 實係數奇次多項式方程式至少有一實根，如圖，至少有一邊會過$f(x)=0$





(D) 未說明係數a,b,c是否為實係數(非虛數)

(E) 正確，實係數多項式虛根成對

正解 ACE

3 (A) 如果$f(x)$為實係數方程式，才至少有一實根 ⇒ (不合)

(B) 代數基本定理：每一個n次複係數方程式，只要 $n\geq1$，就至少有一個複數根（實數不為複數根的一種）⇒ (合)

(C) 必須係數為實數 ⇒ (不合)

(D) $\because a,b,c,d\in Z$ ⇒ 係數為整數，∴無理根成對 ⇒ (合)，凡有理係數方程式皆有無理根成對的特性。

(E) $\because a,b,c,d\in Z$ ⇒ 係數為整數，且三根不可能皆為虛根(虛根須成對)

∴$f(x)=0$至少一實根 ⇒ (合)

解題關鍵：1. 題目並未強調f(x)方程式是實係數、複係數抑或是有理係數，所以要注意方程式的種類。

2. 虛根成對才能形成實係數，無理根成對才能形成有理係數。

正解 BDE

即學即測

1 方程式$x-2013+\log_2 x=0$有n個實數解，則n＝

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3。

2 已知$f(x)=2013^x$、$g(x)=\log_{2013} x$，則下列哪些選項是正確的？

（A）$f(g(2013))=1$　　（B）$g(f(2013))=2013$

（C）$\dfrac{f(2013)}{f(2000)}=\dfrac{f(14)}{f(1)}$　　（D）$g(2013)-g(2000)=g(15)-g(2)$

（E）在 xy 平面中，$y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 的圖形對稱於 $y=x$ 的直線。

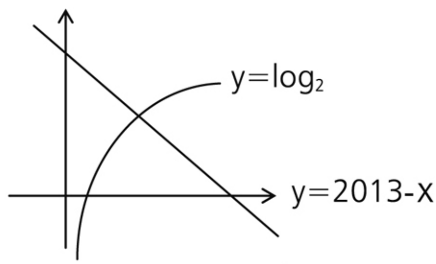
30秒 快速理解!!

1

$$2013-x+\log_2 x=0 \Rightarrow \begin{cases} y=2013-x \\ y=\log_2 x \end{cases}$$

由右圖知兩者只有一交點

∴方程式$x-2013+\log_2 x=0$只有一解



正解　B

2 （A）$f(g(2013))=f(\log_{2013}2013)=f(1)=2013^1=2013$

（B）$g(f(2013))=g(2013^{2013})=\log_{2013}2013=2013$

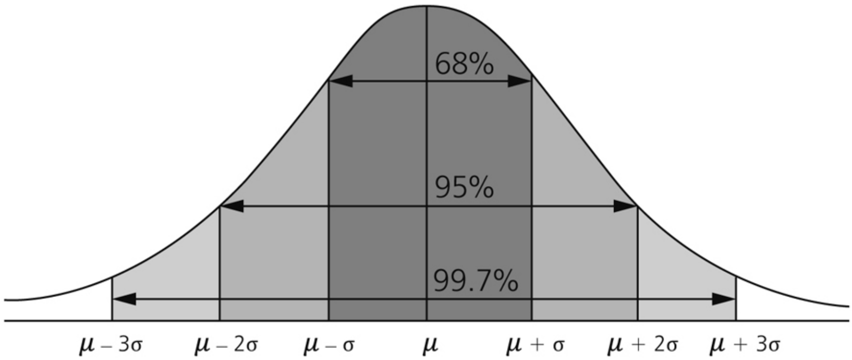
（C）$\dfrac{f(2013)}{f(2000)}=\dfrac{2013^{2013}}{2013^{2000}}=2013^{13}$，$\dfrac{f(14)}{f(1)}=\dfrac{2013^{14}}{2013^{1}}=2013^{13}$，相等

（D）$g(2013)-g(2000)=\log_{2013}2013-\log_{2013}2000=1-\log_{2013}2000$

$g(15)-g(2)=\log_{2013}15-\log_{2013}2$，不相等

（E）對，$y=\log_a x$ 和 $y=a^x$ 對稱於 $y=x$ 之直線

正解　BCE



● 中央極限定理：當樣本數n很大時，不論原母體資料是什麼分布、是連續型或離散型、是對稱或不對稱…等，其樣本平均數 $\bar{x}$ 經標準化後，它的抽樣分布會趨近標準常態分布 $N(0,1)$。故若原母體平均數為 μ、標準差為 σ，則：

(1) 隨機變數 $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

(2) 隨機變數 $\bar{x}$ 的平均數和原母體相同為 μ

(3) 隨機變數 $\bar{x}$ 的標準差為 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$，和原母體不同

即學即測

1 某次數學競賽共 1000 人參加，已知該競賽全體成績平均 60 分、 標準差 10 分，且成績呈常態分布。若甲生於該競賽獲得 80 分，則甲生於此次競賽的名次最接近第幾名？

（A）2　（B）25　（C）100　（D）160

30秒快速理解!!

1 常態分配下，大於 $\bar{x}+2s$ 的比例為2.5%

$1000\times 2.5\%=25$

約為25名

正解　B

●資料的線性轉換：若 $y_i = ax_i + b$，則 (1) $\overline{y} = a\overline{x} + b$　(2) $\sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2$

●標準化數據：若 $z_i = \dfrac{x_i - \mu}{\sigma_x}$，則 (1) $\overline{z} = 0$　(2) $\sigma_z = 1$

即學即測

1 已知有十位同學在某次段考的數學科成績(X)與自然科成績(Y)之結果如下表所示：

座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
數學科成績(X)	70	80	90	80	70	80	60	40	80	70
自然科成績(Y)	65	74	83	74	65	74	56	38	74	65

關於這十位同學於此次段考的數學科成績(X)與自然科成績(Y)，請選出正確的選項。

(A) $Y = \dfrac{9}{10}X + 2$

(B) $\overline{Y} = \dfrac{9}{10}\overline{X} + 2$

(C) Y 之中位數 $= \dfrac{9}{10} \times$ (X 之中位數) $+ 2$

(D) X 的標準差與 Y 的標準差相同

(E) X 與 Y 的相關係數為1 。

2 若已知某一筆資料之算術平均數 $\overline{x} = 10$，標準差 $S_x = 3$，中位數 $M_o = 12$，眾數 $M_e = 8$，四分位差 $IQR = 3$，若 $y = -4x + 3$，試問對新資料y而言，下列哪些正確？

(A) 算術平均數 $= 43$

(B) 標準差 $= -12$

(C) 中位數 $= -45$

(D) 眾數 $= -32$

(E) 四分位差 $= 12$ 。

30秒快速理解!!

1

(1) 三角形之外心到三角形三頂點等距離 $\Rightarrow \overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

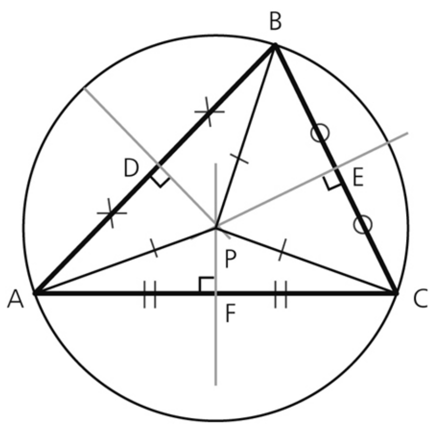
(2) 外心為三角形三邊之中垂線交點

(3) 銳角三角形之外心在三角形之內部

1. 依題意，如圖(P為外心) $\Rightarrow \overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}=R$，

   $\because \angle APC$為$\overset{\frown}{AC}$之圓心角，$\angle ABC$為$\overset{\frown}{AC}$之圓周角

   $\angle APC=2\angle B \Rightarrow \angle B=\dfrac{1}{2}\angle APC=\angle APF \Rightarrow \cos\angle APF=\cos B$



2. 同理 $\cos\angle CPE=\cos A$ ， $\cos\angle BPD=\cos C$
3. 所求如下：

   $\overline{PE}:\overline{PF}:\overline{PD}=\overline{PC}\bullet\cos\angle CPE:\overline{PA}\bullet\cos\angle APF:\overline{PB}\bullet\cos\angle BPD=x:y:z$

   $\Rightarrow R\bullet\cos A:R\bullet\cos B:R\bullet\cos C=x:y:z$

   $\Rightarrow x:y:z=\cos A:\cos B:\cos C$

正解 B

I 速成焦點

3 廣義角與極坐標

焦點：廣義三角函數

● 廣義的三角函數 $(r>0)$

$\sin\theta=\frac{y}{r}$

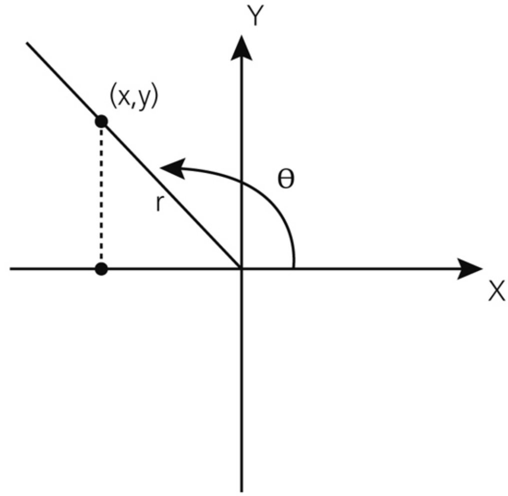
$\cos\theta=\frac{x}{r}$

$\tan\theta=\frac{y}{x}\quad(x\neq 0)$

$\cot\theta=\frac{x}{y}\quad(y\neq 0)$

$\sec\theta=\frac{r}{x}\quad(x\neq 0)$

$\cos\theta=\frac{r}{y}\quad(y\neq 0)$



● 坐標軸上之三角函數值

	0°、2π	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin\theta$	0	1	0	-1
$\cos\theta$	1	0	-1	0
$\tan\theta$	0	無意義	0	無意義
$\cot\theta$	無意義	0	無意義	0
$\sec\theta$	1	無意義	-1	無意義
$\csc\theta$	無意義	1	無意義	-1

● 同界角公式

$\sin(\theta+360^\circ\cdot n)=\sin\theta$　$\tan(\theta+360^\circ\cdot n)=\tan\theta$　$\sec(\theta+360^\circ\cdot n)=\sec\theta$

$\cos(\theta+360^\circ\cdot n)=\cos\theta$　$\cot(\theta+360^\circ\cdot n)=\cot\theta$　$\csc(\theta+360^\circ\cdot n)=\csc\theta$

● 負角公式

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$　$\tan(-\theta)=-\tan\theta$　$\sec(-\theta)=\sec\theta$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$　$\cot(-\theta)=-\cot\theta$　$\csc(-\theta)=-\csc\theta$

6 半倍角公式與三角函數圖形

焦點：半倍角公式、三角函數的圖形與週期

●半角公式

(1) $\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$　（由 $\sin\frac{\theta}{2}$ 在哪個象限決定正負）

(2) $\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$　（由 $\cos\frac{\theta}{2}$ 在哪個象限決定正負）

●二倍角公式

(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

(2) $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$

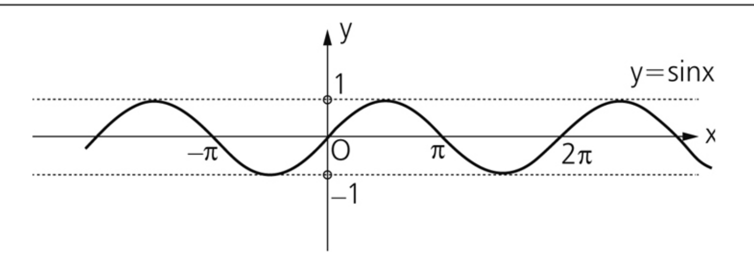
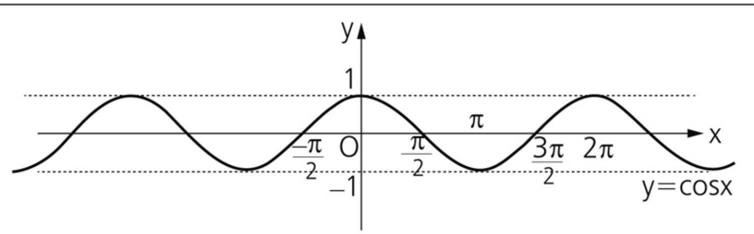
(3) $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

●三倍角公式

(1) $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

(2) $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

●三角函數的圖形

y=sin x	
y=cos x	

30秒快速理解!!

1

$$ax + by + c = 0$$

$$\Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$\left(-\frac{c}{b}\right)$為y軸截距 $\Rightarrow$ 直線和y軸交點$\left(0, -\frac{c}{b}\right)$

$\left(-\frac{c}{a}\right)$為x軸截距 $\Rightarrow$ 直線和x軸交點$\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$

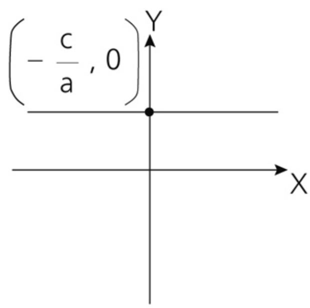
$\left(-\frac{a}{b}\right)$為直線斜率

（A）

$a = 0 \Rightarrow \left(-\frac{a}{b}\right) = 0 \Rightarrow$ 圖形為水平線

$bc < 0 \Rightarrow \left(-\frac{c}{b}\right) > 0$

不會經過第三象限

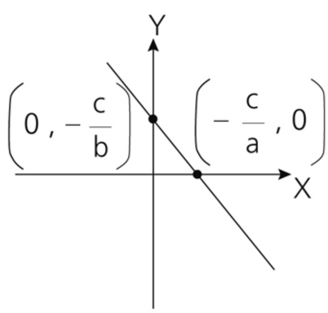


（B）

$ac < 0 \Rightarrow \left(-\frac{c}{a}\right) > 0$

$bc < 0 \Rightarrow \left(-\frac{c}{b}\right) > 0$

不會經過第三象限



●向量座標化與運算：若平面上或空間中有兩向量 ，則

平面中	空間中
$\vec{a}=(a_1,a_2)$ ， $\vec{b}=(b_1,b_2)$	$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ ， $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$
$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$	$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$
$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)$	$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$
$r\vec{a}=(ra_1,ra_2)$	$r\vec{a}=(ra_1,ra_2,ra_3)$

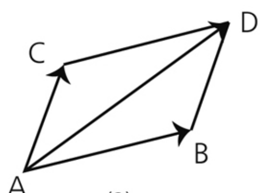
●平面與空間中向量的加減法：

(1) $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

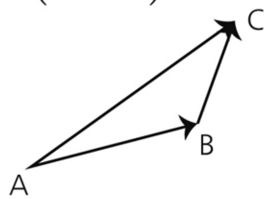
(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

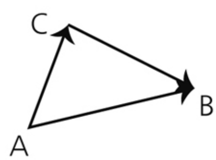
(4) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC}=-\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}$



(2)



(3)



(4)

●平面中的分點公式：若平面上或空間中有三點 A、B、P，且 P 在 $\overline{AB}$ 上，為在之內分點。若 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，則：

平面中	空間中
$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$P(x_3,y_3)$	$A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$、$P(x_3,y_3,z_3)$
$\overrightarrow{OP}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$，其中 O 為平面上任一點	
$P(x_3,y_3)$ $=\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$	$P(x_3,y_3,z_3)$ $=\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\dfrac{ny_1+my_2}{m+n},\dfrac{nz_1+mz_2}{m+n}\right)$